7. NÚMEROS REAIS

O estudo sistemático dos números reais, incluindo sua relação com os números inteiros e os números racionais, inicia no Ensino Fundamental e só termina na Universidade. É difícil ser feito com rigor e coerência, além de ser complicado, pois precisa tratar de tipos excepcionais de números. Por isso, nesta aula teremos espaço apenas para enfatizar alguns pontos básicos.

1).– O que é um número real?

O caminho mais simples nos possibilitando entender os números reais consiste em pensá-los como sendo a medida dos segmentos de reta. Em verdade, como temos de tratar de números positivos e negativos, *eles são os números que expressam a medida dos segmentos de uma* reta orientada.

O que é uma reta orientada, ou eixo?
é qualquer reta na qual foram escolhidos um ponto O que será denominado *origem da reta* e um segmento OU (onde U é um ponto distinto de O) que servirá como *unidade de medida*. Este segmento OU também determina a *orientação positiva* da reta: a determinada pelo sentido de percurso que vai de O para U; o sentido oposto, o que vai de U para O, é denominado *orientação negativa* da reta.

Para simplificar, iremos sempre imaginar/desenhar tais retas orientadas na posição horizontal e o ponto U à direita de O, de modo que a orientação positiva é a que vai da esquerda para a direita.

Os números reais são os números que indicam a medida dos segmentos OP de uma reta orientada. Existem três grandes tipos desses números:

- *se P = O, dizemos que a medida de OP é o número zero;*
- *se P estiver à direita de O, diremos que OP tem orientação positiva e que sua medida é um número real positivo;*
- *se P estiver à esquerda de O, diremos que OP tem orientação negativa e que sua medida é um número real negativo.*

Como é feita a medida dos segmentos de uma reta orientada?
Medir um segmento OP de uma reta orientada consiste em dizer quantas cópias do segmento unitário OU, ou de uma fração dele, temos de tomar para reproduzir exatamente o segmento OP, inclusive em sentido. Esse "quantas cópias" será expresso por meio do que denominamos número real.

Uma vez fixado uma reta orientada, temos só duas possibilidades para a medição de um segmento OP:

1). o segmento OP é *comensurável* com a unidade OU, ou seja: OP é igual a um número inteiro de cópias de OU ou de alguma fração de OU. Os números que expressam a medida desse tipo de segmentos são denominados *números racionais*.
Exemplos:
– se OP é igual a três cópias de OU e P está à direita de O, dizemos que sua medida é 3 OU, ou simplesmente 3;
– se OP é igual a cinco cópias da metade de OU e P está à direita de O, como é natural indicarmos uma metade de OU por OU/2, dizemos que a medida desse OP é 5 OU/2, ou 5/2 OU, ou simplesmente 5/2;
– se OP é igual a três cópias de OU tomadas na orientação negativa da reta (ou seja: P está à esquerda de O), dizemos que sua medida é -3 OU, ou simplesmente -3.

2). o segmento OP é *incomensurável* com a unidade OU, ou seja: por menor que seja a fração de OU que tomemos, nunca conseguimos reproduzir exatamente OP, tudo o que podemos fazer é reproduzí-lo aproximadamente; demonstra-se que essas reproduções aproximadas podem ser tornadas sucessivamente melhores, à medida que formos tomando frações menores de OU, o que intuitivamente corresponde a dizer que no infinito[1] conseguiremos reproduzir exatamente OP. Os números reais que expressam a medida de tais segmentos são os *números irracionais*. Logo adiante, exemplificaremos a medição de segmentos incomensuráveis.

> ✔ *Os* números racionais *são os números reais que expressam a medida dos segmentos comensuráveis com o segmento unitário*
> ✔ *Os* números irracionais *são os números reais que expressam a medida dos segmentos incomensuráveis com o segmento unitário.*
>
> *Como cada segmento OP é ou comensurável, ou incomensurável com a unidade OU, segue que o conjunto dos números reais é formado pelos números racionais e os irracionais, e tão somente eles.*

Mas, então os números reais servem apenas para medir segmentos de reta?
Não! Muito pelo contrário, eles servem para medir qualquer grandeza contínua.
Por *grandeza* entende-se tudo o que pode aumentar ou diminuir. Existem dois tipos básicos delas: as discretas e as contínuas. Exemplos de *grandezas discretas* são a quantidade de ovos numa cesta, a dos alunos numa sala de aula, etc., enquanto que são exemplos de *grandezas contínuas* um comprimento, uma área, uma massa, a quantidade de gasolina no tanque de um automóvel, etc. As grandezas discretas são enumeradas (contadas) e as grandezas contínuas são medidas.

[1]Na universidade, V. terá oportunidade de ver como a noção de *limite* permite tornar tudo isso preciso.

É um princípio fundamental da Matemática que a medição de cada grandeza contínua é equivalente à medição de segmentos de uma reta orientada.

Complementando, cabe observar que o estudo dos números não se esgota com os números reais. Com efeito, até mesmo na Escola Básica estuda-se números mais gerais: os números imaginários (ou complexos), os quais permitem resolver uma série de problemas importantes que ficariam insolúveis se tivéssemos apenas os números reais.

2).– Um tipo importante de números reais: os números decimais.

Os *números decimais* são os números reais que expressam a medida de um tipo particular de segmentos de reta OP comensuráveis com o segmento unitário OU da reta. Com efeito, os números decimais são a medida dos segmentos de reta OP que são iguais a m cópias do segmento unitário OU, ou m cópias da décima parte de OU, ou m cópias da centésima parte de OU, ou em termos gerais: m cópias da 10^n–ésima parte do segmento unitário, onde m é um inteiro qualquer (positivo, negativo ou nulo) e $n = 0, 1, 2, 3$, etc. números decimais

Costuma-se resumir isso dizendo que os números decimais são os números reais representados por *frações decimais*, ou seja: por frações da forma $m/10^n$, com m inteiro e n inteiro $\geqslant 0$. Vide anotações de aula para uma listagem sistemática de frações representando esses números. frações decimais

Os números decimais podem ser somados, subtraídos, multiplicados e divididos fazendo-se a operação aritmética com as respectivas frações decimais que os representam.

Um modo útil de decidirmos se um número real é decimal, ou não

Teorema 1
*Os números decimais são os números reais que podem ser representados por um número inteiro, ou uma fração irredutível cujo denominador pode ser fatorado em primos usando-se **apenas** fatores 2 e/ou 5.*

RECORDAÇÃO DE FRAÇÕES

Fração ordinária é toda fração da forma m/n, onde o numerador m é um inteiro qualquer e o denominador n um inteiro positivo. Exemplos: -5/2, 1/5, 5=5/1, etc.; em particular, note que os número inteiros podem ser vistos como um tipo particular excepcional de fração ordinária: m/1.

Fração irredutível é toda fração ordinária em que o numerador e denominador admitem somente o número 1 como fator em comum.

A demonstração desse teorema explora que, como a fatoração de 10 em primos é $10 = 2 \times 5$, a fatoração de 100 fica $100 = 10 \times 10 = 2 \times 5 \times 2 \times 5$, e assim por diante para as demais potências positivas de 10.

Contraexemplo –
O número real representado por $1/3$ (expressa a medida do segmento OP que é um terço do segmento unitário OU) não é um número decimal! Com efeito, seu denominador se reduz ao número primo 3.

Exemplo –
O número real representado pela fração $364/125$ é um número decimal, pois esta fração é irredutível (seu numerador tem a fatoração em primos $2^2 \times 7 \times 13$ e o denominador fica 5^3, logo não há fator primo em comum) e no denominador somente aparece o fator primo 5.
Note que, apesar de este número ser um número decimal, a fração usada para representá-lo, $364/125$, não é uma fração decimal. Apesar disso, o teorema anterior também garante que tem de existir *alguma* fração decimal capaz de representar esse número; com efeito, uma delas é facilmente determinada:

$$\frac{364}{125} = \frac{364\times 8}{125\times 8} = \frac{2912}{1000}.$$

Isso significa dizer que esse número real é a medida do segmento OP que é igual a 2912 cópias do milésimo do segmento unitário OU.

3).– Representação com vírgula dos números decimais[2]

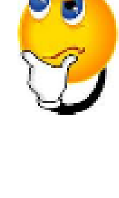
Dígito
é qualquer inteiro do conjunto 0, 1, 2, 3, ... ,9.

Fração decimal simples
é toda fração decimal da forma $\frac{d}{10}$, ou $\frac{d}{100}$, ou $\frac{d}{1000}$, etc. na qual o numerador d é um *dígito*, ou o negativo de um dígito.

A ideia de representação com vírgula
Supomos conhecida a ideia de representação posicional decimal para números inteiros, como em $274 = 200 + 70 + 4 = 2 \times 100 + 7 \times 10 + 4$. A representação com vírgula é sua extensão para os números reais quaisquer, sendo que iniciaremos recordando como ela é feita no caso particular dos números decimais, que é o caso mais fácil, mas também o mais útil.

Exemplificando, observemos que o número decimal dado por $\frac{274}{100}$ pode ser decomposto como a soma de um inteiro mais algumas frações decimais *simples*. Com efeito: $\frac{274}{100} = \frac{200+70+4}{100} = 2 + \frac{7}{10} + \frac{4}{100}$. Disso segue a ideia de *abreviar consideravelmente essa expansão* escrevendo tão somente os numeradores de cada uma dessas frações, do seguinte modo: $\frac{274}{100} = 2{,}74$. É fácil ver que podemos fazer o mesmo com qualquer outro número decimal. Mas, isso não traz ambiguidades de interpretação? Não, desde que tornemos obrigatórias duas convenções:

- ✔ cada dígito depois da vírgula representa uma fração simples cujo denominador é a potência de 10 correspondente à *posição* (lida da esquerda para a direita) do dígito na representação: primeiro dígito → denominador 10, segundo dígito → denominador 100, etc.;
- ✔ usamos o dígito zero para indicar as frações decimais simples que não aparecerem na expansão decimal de um número decimal. Por exemplo, a expansão $\frac{2704}{1000} = \frac{2000+700+4}{1000} = 2 + \frac{7}{10} + \frac{4}{1000}$ deve ser reescrita como $\frac{2704}{1000} = 2 + \frac{7}{10} + \frac{0}{100} + \frac{4}{1000}$, o que dá $\frac{2704}{1000} = 2{,}704$.
  Compare com $2{,}74 = \frac{274}{100}$ e conclua que realmente esse sistema de representação teria ambiguidade se não utilisássemos o dígito zero.



[2] O correto é dizermos "representação posicional em base 10". Apesar de a terminologia "representação com vírgula" ser muito usada na Escola Básica, ela é ambígua na medida em que poderia ser usada com qualquer sistema de numeração posicional (base 2, 10, 16, 60, etc.).

Exemplo: $24,003$ é a representação de $24+\frac{0}{10}+\frac{0}{100}+\frac{3}{1000}=24+\frac{3}{1000}=\frac{24003}{1000}$.
Analogamente, $-24,003$ é a representação do número decimal negativo dado pela fração: $-\frac{24003}{1000}$ e deve ser entendida como uma abreviação de $-\frac{24003}{1000}=-24-\frac{0}{10}-\frac{0}{100}-\frac{3}{1000}=-24-\frac{3}{1000}$.

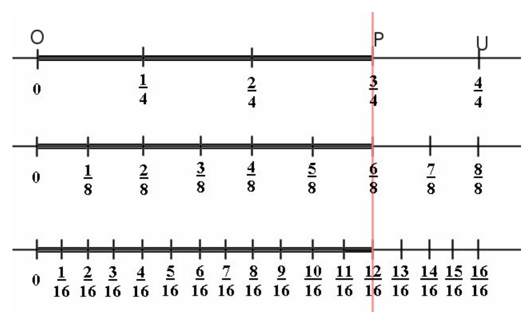
4).– Um tipo mais geral de números reais: os números racionais

Os *números racionais* são os números reais que expressam a medida dos segmentos de reta comensuráveis com o segmento unitário. Isso significa que os números racionais são os números reais representados por frações ordinárias. Com efeito, dizer que OP é comensurável com OU significa que alguma fração de OU, digamos $1/n$ OU, ao ser copiada um certo número inteiro, m, de vezes produz OP e daí a medida de OP é m/n vezes o OU.

Existem números racionais que não são números decimais
É imediato que todo número inteiro é um número real decimal, e todo real decimal é um número racional. Por outro lado, existem números racionais que não são números decimais; com efeito, é imediato que o número real representado por $1/3$ é racional, e já vimos que ele não é número decimal.

Primeiro fator complicador

Cada número racional pode ser representado por infinitas frações ordinárias. Isso ocorre pois existem infinitas maneiras de particionarmos OU para reproduzirmos OP. A figura exemplifica isso com o segmento OP que pode ser visto como $OP = 3\ OU/4 = 3/4\ OU$, $OP = 6\ OU/8 = 6/8\ OU$, $OP = 12\ OU/16 = 12/16\ OU$, etc. Contudo, sempre vale que as frações representando a medida de um mesmo segmento OP são todas equivalentes.
(RECORDAÇÃO: Duas frações ordinárias, a/b e c/d, são equivalentes quando, e só quando, ocorrer $ad = bc$.)



5).– Representação com vírgula dos números racionais

A ideia é a mesma do caso dos números decimais: representar cada número racional como a soma de frações decimais *simples*. Contudo, agora temos algumas complicações a enfrentar.

Segundo fator complicador
A não ser no caso dos números decimais, a representação com vírgula dos números racionais envolve uma quantidade ***infinita*** *de frações decimais simples!*
Vejamos o porquê disso no caso do real dado por $1/3$:

$$0,3=\frac{3}{10}<\frac{1}{3}<\frac{4}{10}=0,4 \quad \text{(pois 9<10 e 10<12)}$$
$$0,33=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}=\frac{33}{100}<\frac{1}{3}<\frac{34}{100}=\frac{3}{10}+\frac{4}{100}=0,34 \quad \text{(pois 99<100 e 100<102)}$$
$$0,333=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}=\frac{333}{1000}<\frac{1}{3}<\frac{334}{1000}=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{1000}=0,334 \quad \text{(pois 999<1000 e 1000<1002)}$$
$$0,3333=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}=\frac{3333}{10000}<\frac{1}{3}<\frac{3334}{10000}=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{4}{10000}=0,3334\text{, etc.}$$

Como a diferença entre os extremos dos intervalos encaixando o $1/3$ vai tendendo a zero, escrevemos

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\frac{3}{100000}+\cdots=0,33333\ldots$$

No caso do 1/3, a soma das infinitas frações acima pode ser entendida como a soma de uma PG de razão 1/10 (confira que realmente essa soma vale 1/3!). No caso de outros números racionais, em geral será preciso usar a noção de limite para dar um significado rigoroso para a soma associada à sua expansão com vírgula, o que é assunto a ser visto na Universidade.

Procedimento prático para achar uma representação com vírgula
A principal razão de usarmos a notação $\frac{a}{b}$ para denotarmos as frações ordinárias é que, no caso de $\frac{a}{b}$ representar um número racional, é um teorema que este mesmo racional é igual ao resultado da divisão do inteiro a pelo inteiro b. Ou seja, o traço horizontal que separa o numerador e o denominador *também* pode ser interpretado como indicando divisão!

$$\left(\text{real racional dado pela fração ordinária } \tfrac{a}{b}\right) = a \div b$$

Esse teorema nos permite achar uma representação com vírgula de um número racional fazendo a divisão do numerador pelo denominador de uma sua representação por fração ordinária. Vejamos como fazer isso detalhadamente no caso do racional dado por 3837/250.
– *Parte inteira* da representação: como $3837 = 15 \times 250 + 87$, temos $\frac{3837}{250} = 15 + \frac{87}{250}$;
– *Casa dos décimos:*

$$\frac{87}{250} = \frac{1}{10} \times \frac{870}{250} = \frac{1}{10} \times \frac{3 \times 250 + 120}{250} = \frac{1}{10} \times \left(3 + \frac{120}{250}\right) = \frac{3}{10} + \frac{12}{250}, \text{ e como } 0 < 12/250 < 1/10,$$

a representação com vírgula até a casa dos décimos, com certeza, é $\frac{3837}{250} = 15{,}3\ldots$. Mais precisamente:

$$\frac{3837}{250} = 15 + \frac{3}{10} + \frac{12}{250} = 15{,}3 + \frac{12}{250}.$$

– *Casa dos centésimos:*
do último resto: $\frac{12}{250} = \frac{1}{100} \times \frac{1200}{250} = \frac{1}{100} \times \frac{4 \times 250 + 200}{250} = \frac{1}{100} \times \left(4 + \frac{200}{250}\right) = \frac{4}{100} + \frac{2}{250}$, e como $0 < 2/250 < 1/100$,

até a casa dos centésimos temos, com certeza: $\frac{3837}{250} = 15{,}34\ldots$. Mais precisamente:

$$\frac{3837}{250} = 15 + \frac{3}{10} + \frac{12}{250} = 15 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{250} = 15{,}34 + \frac{2}{250}.$$

– *casa dos milésimos*:
o último resto dá: $\frac{2}{250} = \frac{1}{1000} \times \frac{2000}{250} = \frac{1}{1000} \times \frac{8 \times 250 + 0}{250} = \frac{8}{1000} + \frac{0}{250} = \frac{8}{1000}$. O fato de termos chegado a um resto zero significa que a representação com vírgula deste número termina na casa dos milésimos, e é

$$\frac{3837}{250} = 15 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{250} = 15 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{8}{1000} = 15{,}348.$$

Observe que, neste caso, os restos, 87/250, 12/250, 2/250, 0/250, das sucessivas divisões foram diminuindo até chegar ao resto nulo. Isso ocorreu pois o número dado é um número decimal. Com efeito: $\frac{3837}{250} = \frac{3837 \times 4}{250 \times 4} = \frac{15348}{1000}$, forma decimal esta que permite rapidamente confirmar a correção da representação com vírgula que calculamos acima. Infelizmente, essa forma rápida não pode ser aplicada em números racionais não decimais, como é o caso do racional dado por 1/3. Contudo, o método das divisões continua sendo aplicado nesses casos. Vejamos sua aplicação abreviada:

$$\frac{1}{3} = 0 + \frac{1}{3} = 0 + \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{300} = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{1}{3000} = \cdots = 0{,}333\ldots$$

É importante que V. faça os detalhes do cálculo acima e observe que os restos, 1/3, 1/30, 1/300, 1/3000, etc., das sucessivas divisões novamente vão diminuindo, *só que neste caso nunca chegam a se anular*: apenas vão se aproximando cada vez mais do zero.

Na prática nunca se faz as sucessivas divisões com o detalhe acima, que tiveram como objetivo mostrar porque o método das divisões funciona. Na prática, meramente se aplica o algoritmo de divisão de inteiros que se aprende na Escola e que recordamos a seguir.

> ***Método das Divisões para achar representação com vírgula***
> *Dado um número racional r:*
> - *se r for um inteiro a, sua representação com vírgula fica $r = a{,}000... = a$*
> - *se r for um racional positivo não inteiro, a partir de uma sua representação em fração ordinária, fazemos divisões para determinar sucessivamente a parte inteira de sua representação por vírgula, e o dígito da casa dos décimos, o da casa dos centésimos, o da dos milésimos, etc., de sua parte fracionária.*
> - *se r for um racional negativo não inteiro, sua representação com vírgula é a do número positivo $-r$ precedida do sinal menos.*

É conveniente usarmos a seguinte terminologia:
– *número racional inteiro* é todo o racional representável por um número inteiro;
– *número racional fracionário* é todo racional que não pode ser representado por um número inteiro.
Exemplos: o racional dado por $18/3$ é inteiro (pois $18/3 = 6$), enquanto que $5/2$ é fracionário (apesar de ser maior do que um).
– *dízima* é o nome que damos para a lista de todos os dígitos *depois* da vírgula da representação com vírgula de um número real. dízima
Exemplos: a dízima de $1/3 = 0{,}333...$ é $333...$; a de $1/17 = 0{,}0588235294117647 05...$ começa com 0588235294117647 .

O próximo objetivo é catalogar as possíveis representações com vírgula dos números racionais. Infelizmente, teremos de levar em conta mais um fator complicador:

Terceiro fator complicador
Alguns números racionais têm duas representações com vírgula e o Método das Divisões somente produz uma delas. Ele somente produz representações que não terminam com um bloco infinito de dígitos todos iguais a 9; ou seja: nunca produz dízimas 9-terminantes.

Por exemplo, o racional dado por $25/10$ tem duas representações com vírgula: $25/10 = 2{,}5$ e $25/10 = 2{,}4999...$, sendo que o Método das Divisões dá apenas a primeira delas.
Além de representações com dízima 9-terminante serem legítimas, eventualmente a solução de um problema pode nos levar a uma resposta desse tipo.
Outro exemplo importante de duplicidade de representação com vírgula é o dos números inteiros. Assim, é perfeitamente legítimo escrever $1=0{,}999...$, de modo que, em particular: $1-0{,}999... =0$.
Exercício –
usando a fórmula da soma de todos os termos de uma PG, confira que $2{,}4999... = 2{,}5$ e que $0{,}999... = 1$.

Descrição das representações com vírgula de números racionais

Uma dízima é periódica quando em alguma casa depois da vírgula inicia um bloco de digitos tal que, a partir dessa casa, a lista dos demais dígitos consiste na infinita repetição desse bloco.

> ***Teorema***
>
> *Só existem dois tipos de representações com vírgula dos números racionais: as que têm dízima finita e as que têm dízima infinita periódica. Mais precisamente:*
>
> - *Se um número racional* for número decimal *(inteiro ou fracionário), ele tem exatamente duas representações com vírgula: uma com dízima finita e a outra com dízima infinita 9-terminante.*
> - *Se um número racional* não for número decimal*, ele tem apenas uma representação com vírgula, e a dízima desta representação é periódica.*

Prova. O Método das Divisões produz restos que vão diminuindo e temos duas possibilidades para seus valores: ou eventualmente chegamos a um resto nulo, ou os numeradores dos restos ficam presos estritamente entre 0 e o valor do denominador. Na primeira possibilidade temos uma dízima finita e na segunda, como temos infinitos restos não nulos e apenas um número finito de possíveis numeradores para eles, terá de haver repetição do numerador desses restos, e a partir daí voltaremos a gerar os numeradores já obtidos, ou seja: a dízima terá de ser periódica.

Exemplos

– racionais que são números decimais: 32/25 = 1,28 = 1,27999... ; -7/8 = -0,875 = -0,874999...

– racionais que não são números decimais: 7/12 = 0,58333... ; 110/21 = 5,238095 238095 238095...

É costume usarmos uma barra sobre o bloco repetitivo, assim fica mais rápido e preciso escrever a representação. Por exemplo: $-3/11 = -0,27272727... = -0,\overline{27}$; $7/12 = 0,58\overline{3}$; $110/21 = 5,\overline{238095}$; $25/10 = 2,5 = 2,5\overline{0} = 2,4\overline{9}$.

Os exemplos acima mostram que existem dois tipos de representações com vírgula periódicas: as cujas dízimas consistem apenas na infinita repetição de um bloco periódico (exemplo: $-3/11 = -0,\overline{27}$) e as que são formadas de um bloco inicial seguido da infinita repetição de um bloco periódico (exemplo: $7/12 = 0,58\overline{3}$). As primeiras são denominadas *dízimas periódicas simples* e as segundas *dízimas periódicas compostas ou mistas.*

> Um número racional dado por fração irredutível tem representação com vírgula
>
> - *finita* quando o denominador dessa fração só tem 2 e/ou 5 como fatores primos (possivelmente repetidos); exemplo: $323/125 = 323/5^3 = 2{,}584$;
> - *periódica simples* quando no denominador dessa fração os fatores primos são todos distintos de 2 e 5; exemplo: $-3/11 = -0,27272727... = -0,\overline{27}$;
> - *periódica composta* quando o denominador dessa fração tem ao menos um dentre 2 e 5 como fator primo, e também mais no mínimo um outro fator primo distinto desses dois; exemplo: $7/12 = 0,58\overline{3} = 0,58333\ldots$.

Problema da geratriz

Já sabemos como obter representação em vírgula de qualquer racional, e também sabemos as possíveis formas da correspondente dízima. Cabe investigar a recíproca, ou seja: se imaginarmos uma dízima qualquer, será ela a dízima de algum número racional? Certamente *não* será se a dízima for infinita não periódica. Contudo, veremos que a resposta é *sim* quando a dízima for finita ou infinita periódica, e também mostraremos como achar uma correspondente *geratriz*, ou seja uma fração ordinária representando o número com tal dízima. geratriz

Exemplo 1 (geratriz de dízima finita)
Seja determinar o número racional que originou a expansão 21,34.
Temos 21,34 = 21 + 3/10 + 4/100 = 21 + 30/100 + 4/100 = 21 + 34/100.

Exemplo 2 (geratriz de dízima periódica simples)
Seja determinar o número racional que originou a expansão $0,214214214... = 0,\overline{214}$.
Indicando por r este número, temos 1000 r = 214 + 0,214 214 214... = 214 + r, de modo que 999 r = 214, logo r = 214/999.

Exemplo 3 (geratriz de dízima periódica composta)
Seja determinar o número racional que originou a expansão $0,5833333333... = 0,58\overline{3}$.
Indicando por r este número, temos 100 r = 58 + 0,3333 3333...; ora, sendo s = 0,3333 3333..., pelo raciocínio do exemplo anterior, obtemos 10 s = 3 + 0,3333 3333... = 3 + s, logo 9 s = 3 e daí s = 3/9 = 1/3; de modo que 100 r = 58 + s = 58 + 1/3 = 175/3, logo r = 175/300 = 7/12.

6).– Os outros números reais: os números irracionais

Definição
Os números irracionais são os números reais que não são números racionais, ou seja: são os números reais que não são representáveis por fração ordinária. Equivale a dizer que são os números que expressam a medida dos segmentos de reta que não são uma fração de seu segmento unitário (= são incomensuráveis com o segmento unitário).

Existe uma quantidade infinita de números irracionais, com efeito:
por exemplo, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, *etc., ou seja: as raízes quadradas de números primos são números irracionais.*
Prova, por absurdo. Observação inicial: é uma consequência imediata da *unicidade* do Teorema Fundamental da Aritmética que, para qualquer inteiro $c \geqslant 2$, a fatoração em primos de seu quadrado é única (a menos da ordem de seus fatores) e é obtida elevando ao quadrado cada fator primo de c.
Mostremos, então, que essa observação garante que é impossível um p primo produzir $\sqrt{p}$ número racional. Com efeito, indicando por $\frac{a}{b}$ a fração irredutível representando $\sqrt{p}$, temos: $a^2 = pb^2$. Ora, pela observação acima, isso implicaria que no membro da esquerda aparece uma potência par de p (talvez nula) e no da direita uma potência ímpar de p, o que seria um absurdo.

Exemplo: *a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário é um número irracional.*
Do Teorema de Pythagoras, a medida d da diagonal de um quadrado, cujo lado mede ℓ, verifica $d^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2$. De modo que $d = \ell\sqrt{2}$. Ora, quando o quadrado tiver lado unitário, $\ell = 1$, ficamos com $d = \sqrt{2}$, que já vimos ser irracional.
Cuidado: *a medida da diagonal de um quadrado de lado igual a* $\sqrt{2}$ *é um número racional.*
Prova. Agora, temos $d = \ell\sqrt{2} = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$.

7).– Representação com vírgula dos números irracionais

Teorema –
Cada número irracional tem representação com vírgula. Ademais, esta representação é única e sempre tem uma dízima ***infinita não periódica.***

Teorema –
Reciprocamente, toda dízima ***infinita não periódica*** *que pudermos imaginar obrigatoriamente representa algum número irracional.*

Cuidado: erro comum!
O fato de que os números irracionais nunca têm dízima periódica não significa que sua dízima tenha de ser totalmente desprovida de regularidade ou não possa ser descrita completamente. Por exemplo: 0,101101110111101111101111110... é a representação com vírgula de um irracional.

Como determinamos a representação com vírgula dos irracionais?
Pela teoria, teríamos de medir o correspondente segmento de reta fazendo sucessivas aproximações, de modo bem análogo ao que fizemos com o segmento de medida 1/3, na página 5. Na prática usamos algum procedimento de cálculo sistemático que explore características do irracional em questão. Vejamos isso no caso de $\sqrt{2}$.

Um procedimento bem simples para determinar a representação com vírgula de $\sqrt{2}$ *:*
Para r real positivo, é óbvio que $r < \sqrt{2} \iff r^2 < 2$, e que $\sqrt{2} < r \iff 2 < r^2$. O quadro abaixo mostra como usar essa observação para determinar, casa por casa, a dízima de $\sqrt{2}$:

$$
\begin{aligned}
1 < \sqrt{2} &< 2 \qquad \text{(pois } 1 < 2 < 4\text{)}\\
1,4 < \sqrt{2} &< 1,5 \qquad \text{(pois } 1,96 < 2 < 2,25\text{)}\\
1,41 < \sqrt{2} &< 1,42\\
1,414 < \sqrt{2} &< 1,415\\
1,4142 < \sqrt{2} &< 1,4143\\
1,41421 < \sqrt{2} &< 1,41422\\
1,414213 < \sqrt{2} &< 1,414214\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$\sqrt{2} = 1,41421\,35623\,73095\,04880\ldots = 1+\tfrac{4}{10}+\tfrac{1}{10^2}+\tfrac{4}{10^3}+\tfrac{2}{10^4}+\tfrac{1}{10^5}+\tfrac{3}{10^6}+\tfrac{5}{10^7}+\tfrac{6}{10^8}+\tfrac{2}{10^9}+\tfrac{3}{10^{10}}+\tfrac{7}{10^{11}}+\tfrac{3}{10^{12}}+\cdots$$

Esse processo precisaria ser levado ao infinito para dar a exata representação com vírgula de $\sqrt{2}$, ou pode ser abortado para dar uma aproximação conveniente de $\sqrt{2}$.
A Matemática Computacional, disciplina estudada na universidade, estuda diversos procedimentos muito mais eficientes para calcular $\sqrt{2}$ e outros números irracionais.

Cuidado ao usar calculadoras!
Como as calculadoras sempre mostram uma quantidade finita de dígitos no visor, elas não conseguem representar exatamente nenhum irracional, e nem mesmo os racionais que não são números decimais (como 1/3). Ignorando-se isso, podemos facilmente tirar conclusões erradas e até absurdas:

$$\pi = \sqrt[4]{\tfrac{2143}{22}}\,? \qquad\qquad \sqrt[6]{\tfrac{6}{10}}\cdot\sqrt[28]{\tfrac{49}{10}} = 1\,?$$